5. Morfologia Matemática numérica

Operações morfológicas elementares (erosão e dilatação). Operações morfológicas de abertura e fecho. Gradiente morfológico. Semi-gradientes. Operações de Chapéu-Alto e Chapéu-Baixo. Reconstrução geodésica numérica. Extremos regionais. Transformação Watershed.

Fernando Soares

Introdução

As operações elementares da morfologia matemática binária podem ser estendidas para as imagens de escala de cinzentos através do uso das operações de "**mínimo**" e "**máximo**", que estabelecem um paralelo com as operações de erosão e dilatação binárias.

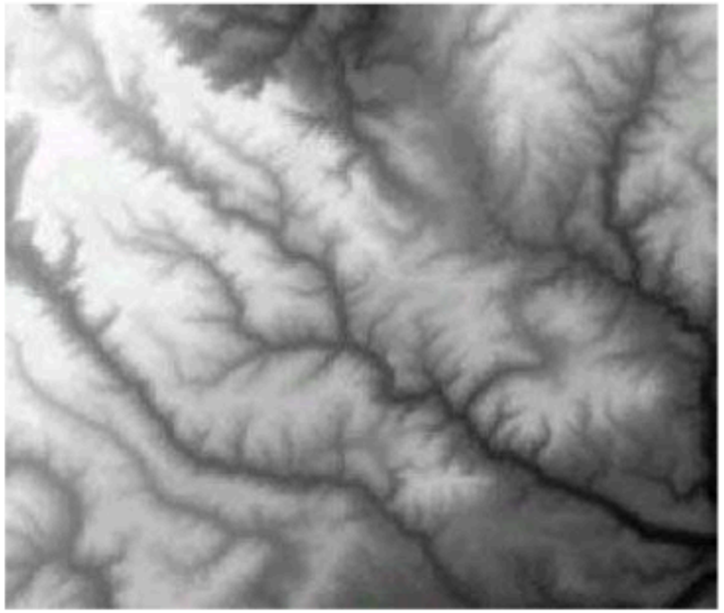
Estas operações atribuem a cada pixel da imagem novos valores correspondentes ao mínimo ou ao máximo valor de uma dada vizinhança em torno desse pixel. A vizinhança fica definida de acordo com a forma do elemento estruturante.

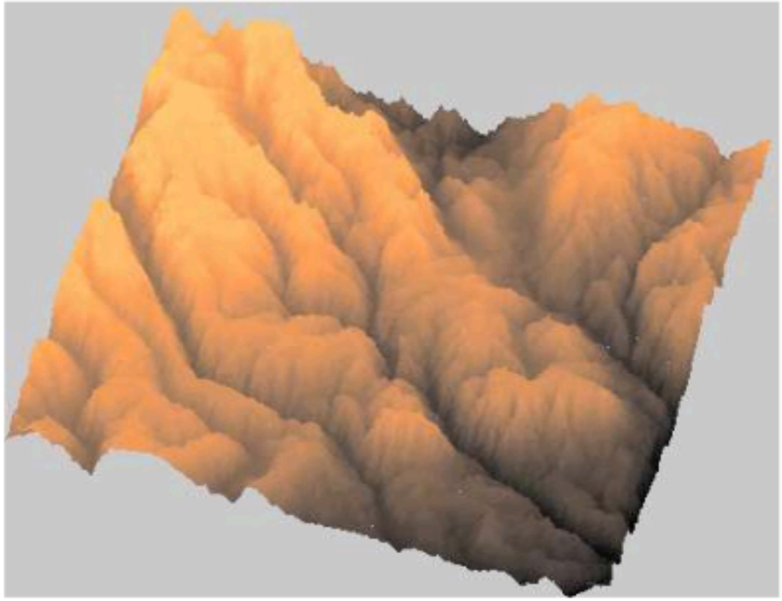
A morfologia matemática numérica tem aplicação em processos de contraste de imagem, decrição de texturas, detecção de fronteiras e limiarização, entre outras.

Fernando Soares

Introdução

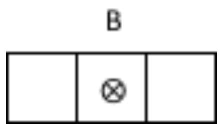
Na morfologia matemática as intensidades dos pixels das imagens numéricas são consideradas como elevações topográficas.



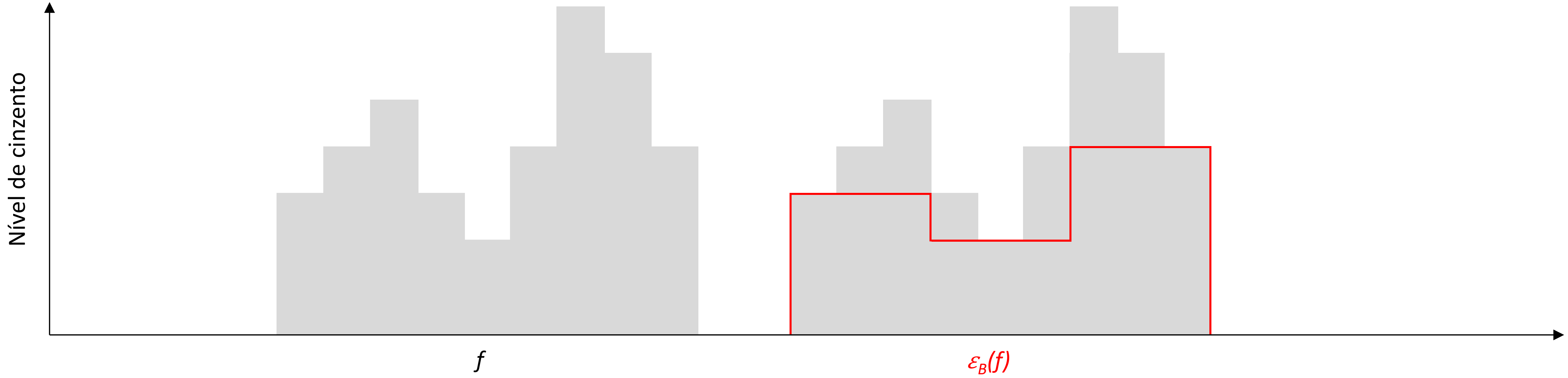


Transformações morfológicas elementares

A operação de **erosão** ε de uma dada função *f*, por um elemento estruturante B, posicionado com a sua origem em *x* (B_x), é dada pela expressão:



$$\varepsilon_B(f(x)) = \min_{b \in B} f(x+b)$$



Fernando Soares

Ciências ULisboa

Transformações morfológicas elementares

Exemplo da erosão:

imagem

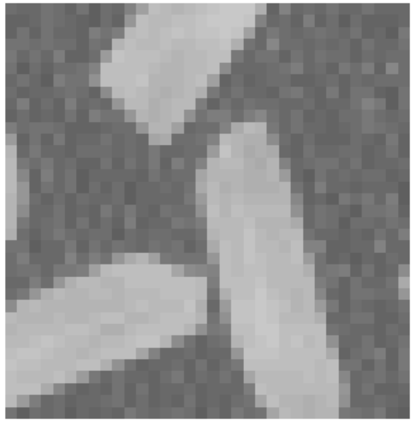
	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

1	1	1
1	1	1
1	1	1

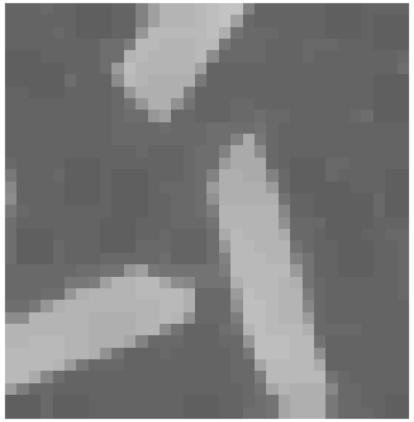
erosão

	:	:	:	:	:	
..						..
..		3	2	0		..
..		3	1	0		..
..		3	1	1		..
..						..
	:	:	:	:	:	

Inicial

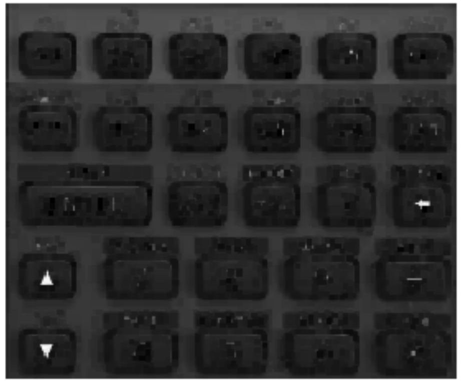


Erosão



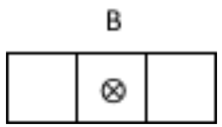
Inicial

Erosão

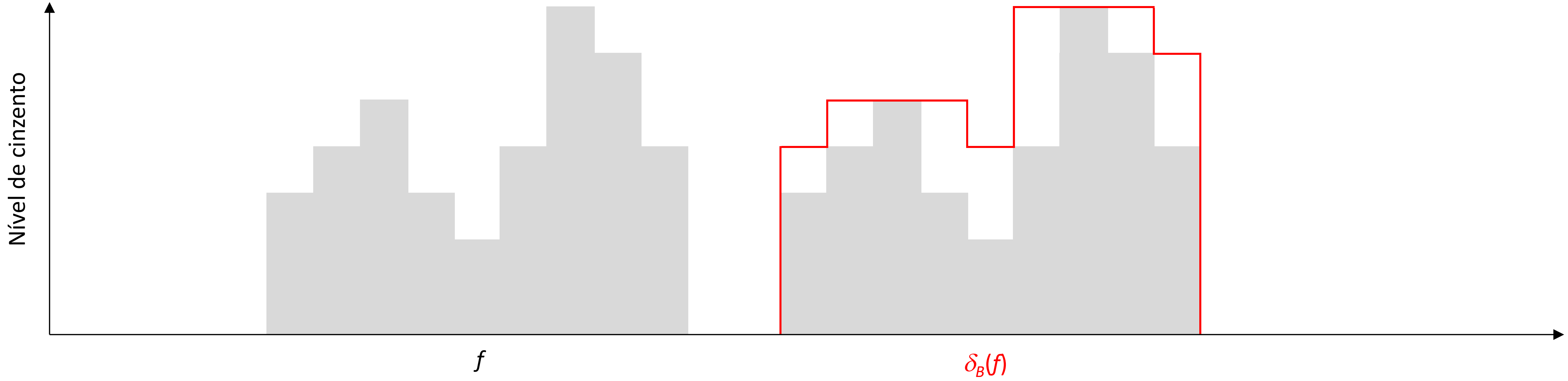


Transformações morfológicas elementares

A operação de **dilatação** δ de uma dada função *f*, por um elemento estruturante B, posicionado com a sua origem em *x* (B_x), é dada pela expressão:



$$\delta_B(f(x)) = \max_{b \in B} f(x+b)$$



Fernando Soares

Transformações morfológicas elementares

Exemplo da dilatação:

imagem

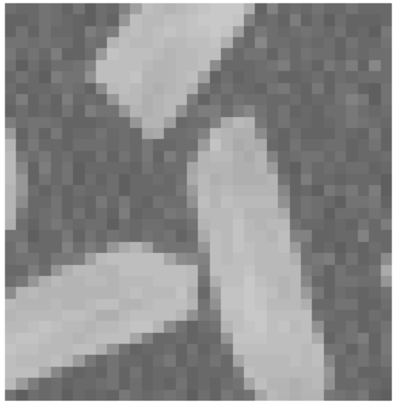
	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

1	1	1
1	1	1
1	1	1

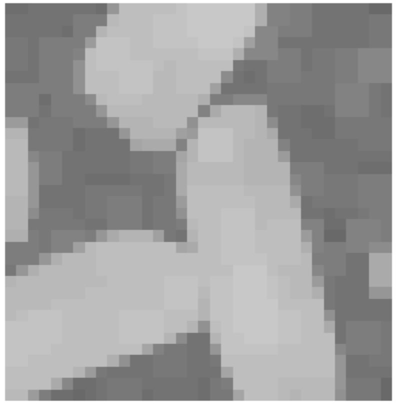
dilatação

	:	:	:	:	:	
..						..
..		24	21	21		..
..		22	21	24		..
..		22	23	24		..
..						..
	:	:	:	:	:	

Inicial



Dilatação



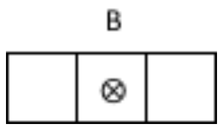
Inicial

Dilatação

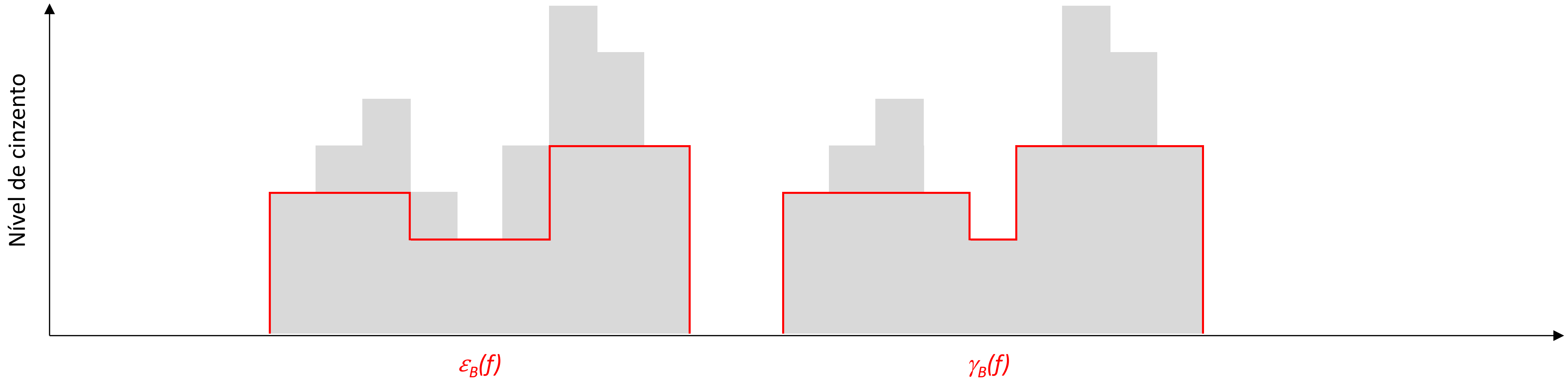
Fernando Soares

Transformações morfológicas elementares

A operação de **abertura** γ de uma dada função f, por um elemento estruturante B, posicionado com a sua origem em x (B_x), é dada pela expressão:



$$\gamma_B(f(x)) = \delta_B\big(\varepsilon_B(f(x))\big)$$



Transformações morfológicas elementares

Exemplo da abertura:

imagem

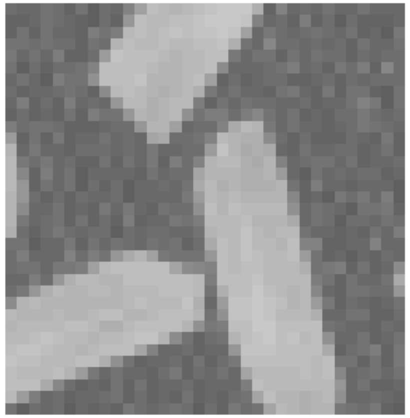
	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

1	1	1
1	1	1
1	1	1

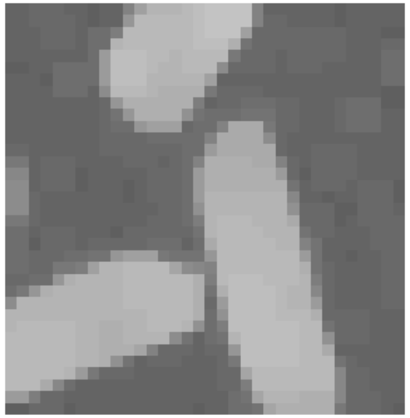
abertura

	:	:	:	:	:	
..						..
..						..
..			3			..
..						..
..						..
	:	:	:	:	:	

Inicial



Abertura

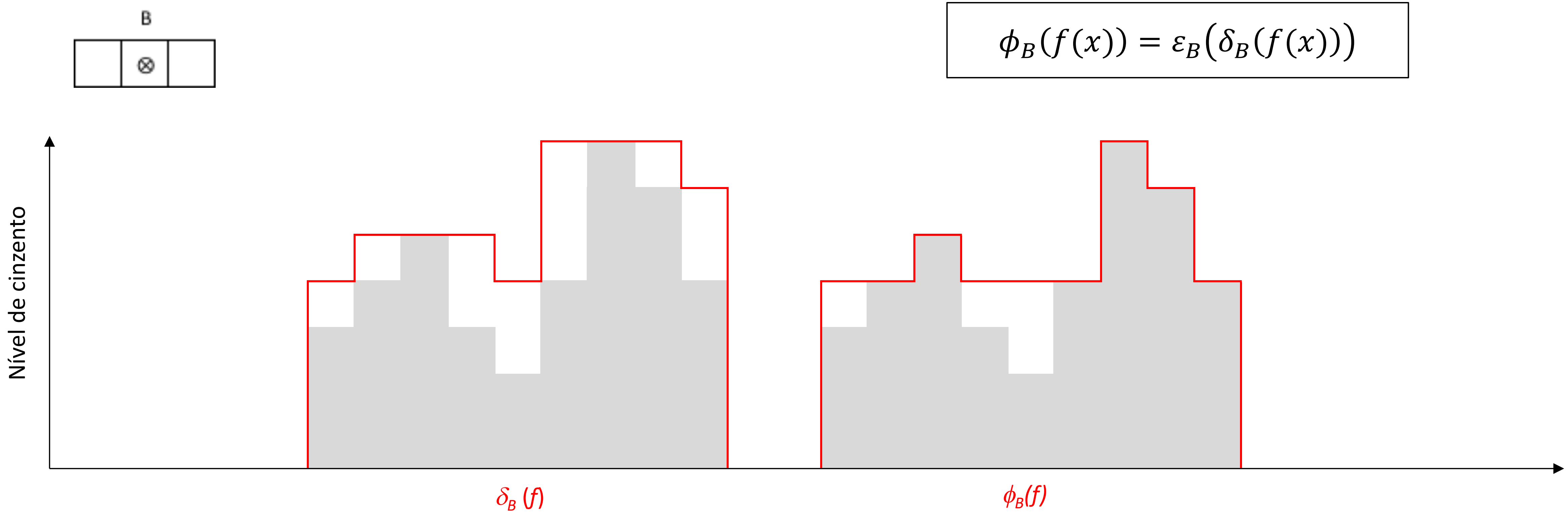


Fernando Soares

Transformações morfológicas elementares

A operação de **fecho** ϕ de uma dada função f, por um elemento estruturante B, posicionado com a sua origem em x (B_x), é dada pela expressão:

$$\phi_B(f(x)) = \varepsilon_B\big(\delta_B(f(x))\big)$$



Ciências ULisboa

Fernando Soares

Transformações morfológicas elementares

Exemplo do fecho:

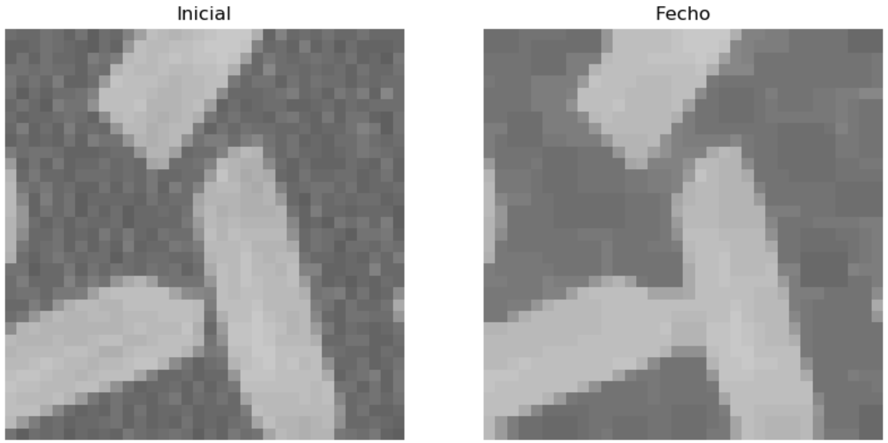
imagem

	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

1	1	1
1	1	1
1	1	1

fecho

	:	:	:	:	:	
..						..
..						..
..			21			..
..						..
..						..
	:	:	:	:	:	



Fernando Soares

Suavização morfológica

A suavização básica de uma imagem por métodos morfológicos pode ser obtida com várias abordagens. Uma delas consiste em executar uma operação de abertura, seguida de um fecho. Desta forma removem-se artefactos claros e escuros com tamanho igual ou abaixo do tamanho do elemento estruturante.

Inicial

f

Suavização 1

$\phi_B(\gamma_B(f))$

Suavização morfológica

Uma segunda abordagem de suavização consiste em executar a média entre as operações de erosão e dilatação de uma imagem.

Inicial

f

Suavização 2

$0.5 \times [\varepsilon_B(f) + \delta_B(f)]$

Fernando Soares

Gradiente morfológico

A assunção comum relativa ao gradiente é a de que as fronteiras dos objectos, ou arestas estão localizadas onde se verificam diferenças elevadas entre os valores de pixels vizinhos.

Os operadores de gradiente são usados para evidenciar essas variações.

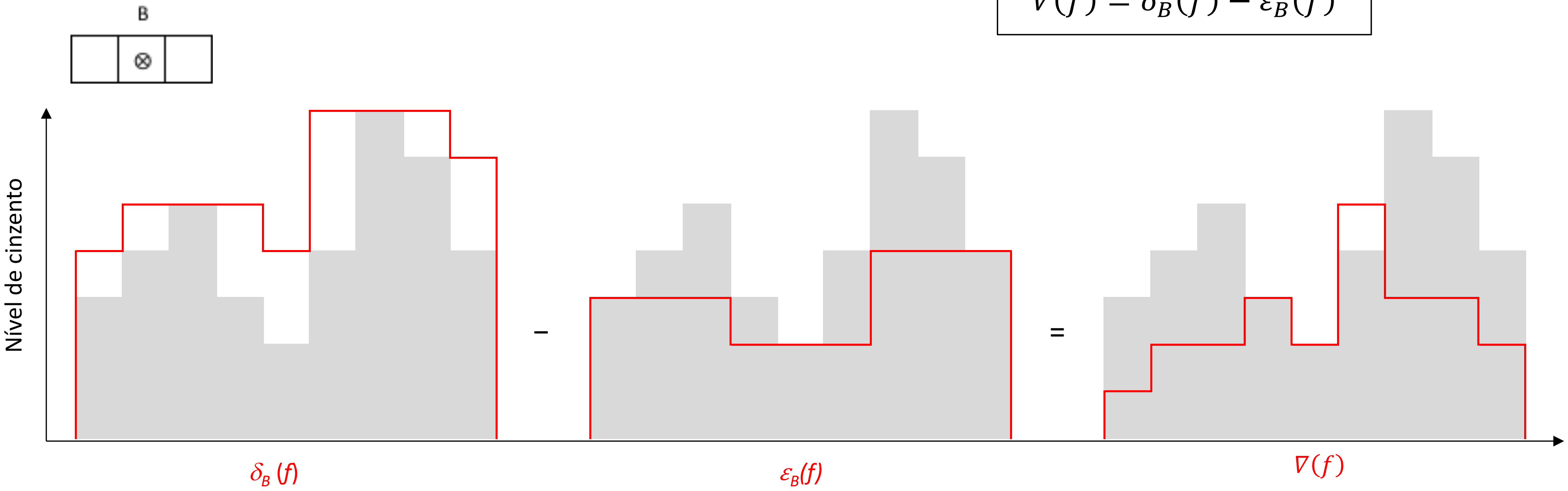
Havendo ruído aleatório, a imagem deve ser filtrada antes de aplicar o operador de gradiente, para evitar realçar também o ruído.

Fernando Soares

Gradiente morfológico

O **gradiente morfológico** ∇ (também designado por gradiente de Beucher) determina-se, em cada pixel, pela diferença algébrica entre a dilatação δ(*f*) e a erosão ε(*f*).

$$\nabla(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$$



Gradiente morfológico

Esta operação evidencia as transições mais significativas numa imagem numérica.

O resultado depende directamente das variações de intensidade na vizinhança dos pixels, definida por um elemento estruturante.

Ao contrário dos operadores de gradiente lineares de Sobel, Prewitt, ou Roberts, os gradientes morfológicos obtidos com elementos estruturantes simétricos tendem a depender menos da direccionalidade das arestas dos objectos.

Gradiente morfológico

Exemplo do gradiente morfológico:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

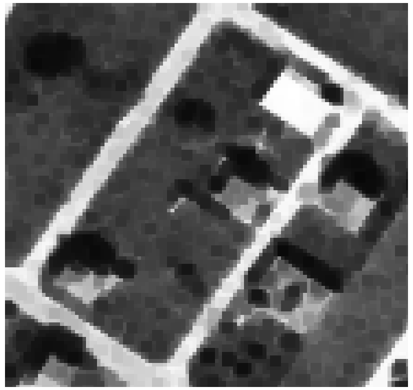
imagem

	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

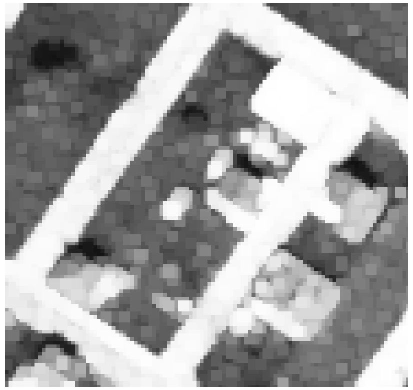
gradiente morfológico

	:	:	:	:	:	
..						..
..		21	19	21		..
..		19	20	24		..
..		21	22	23		..
..						..
	:	:	:	:	:	

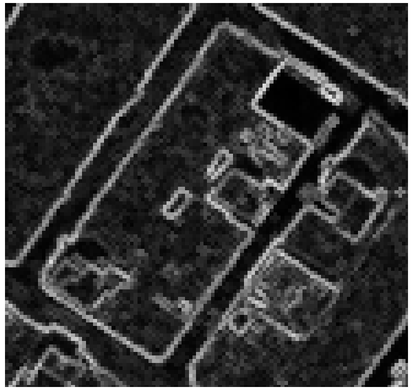
f



$\varepsilon(f)$



$\delta(f)$



$\nabla(f) \equiv \delta(f) - \varepsilon(f)$

Fernando Soares

Semi-gradientes

A espessura de uma aresta detectada por um gradiente morfológico é igual a dois pixels: um pixel em cada lado da fronteira.

Os semi-gradientes podem ser usados para detectar os limites interno ou externo de uma fronteira. Tais gradientes têm só um pixel de espessura.

Fernando Soares

Semi-gradientes

O **semi-gradiente por erosão**, ou **gradiente interno** ∇^{-}, define-se como sendo a diferença entre a imagem original e a sua erosão numérica.

$$\boxed{\nabla_B^{-}(f) = f - \varepsilon_B(f)}$$

O gradiente interno evidencia:

- as fronteiras internas dos objectos que são mais claros que o fundo.
- as fronteiras externas dos objectos que são mais escuros que o fundo.

Semi-gradientes

O **semi-gradiente por dilatação**, ou **gradiente externo** ∇^+, define-se como sendo a diferença entre a dilatação numérica de uma imagem e a sua representação original.

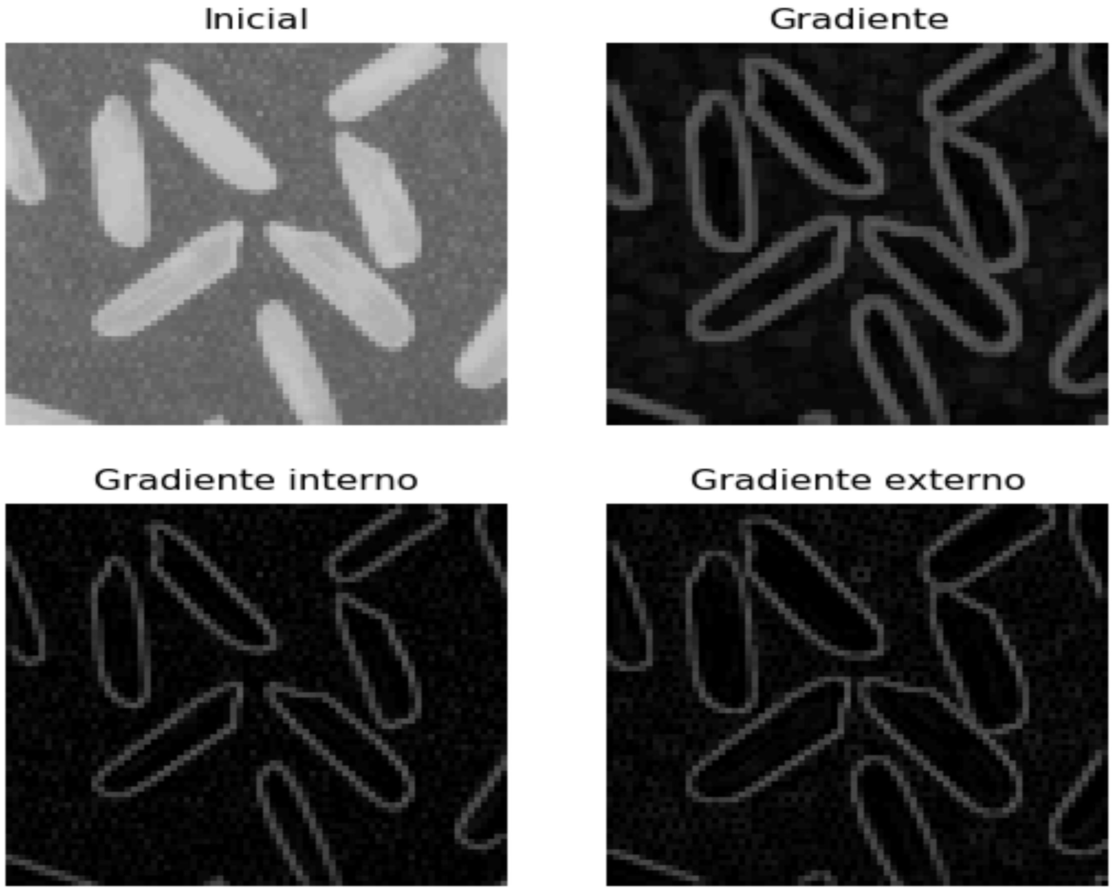
$$\boxed{\nabla_B^+(f) = \delta_B(f) - f}$$

O gradiente externo evidencia.

- as fronteiras internas dos objectos que são mais escuros que o fundo.
- as fronteiras externas dos objectos que são mais claros que o fundo.

Semi-gradientes

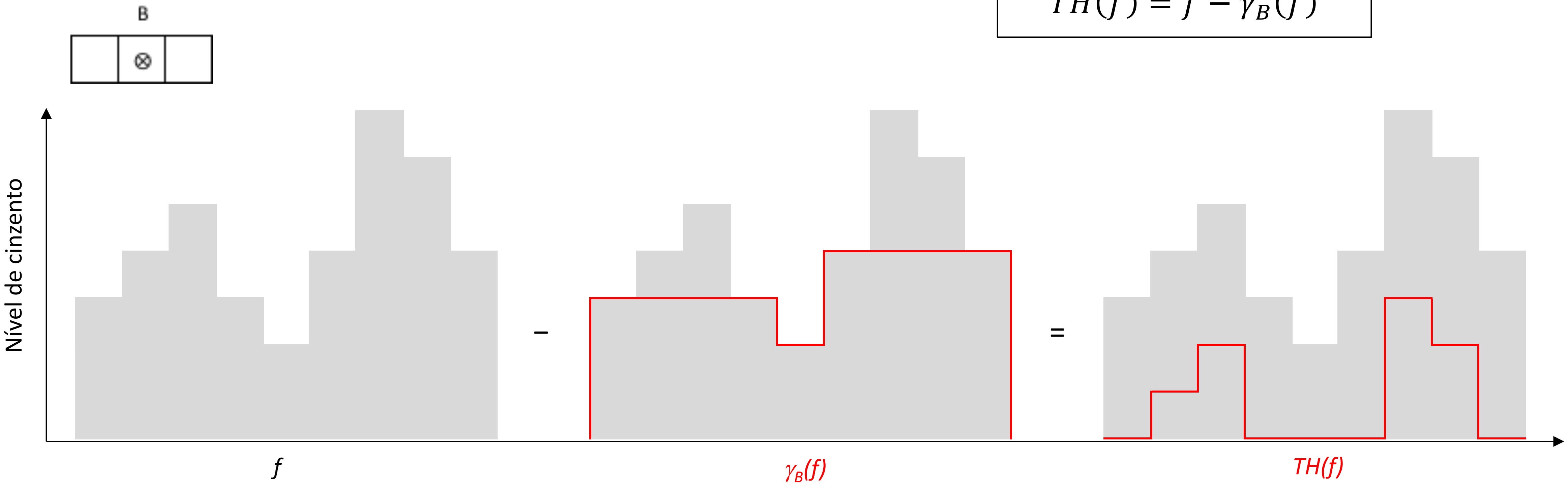
Exemplos dos semi-gradientes interno e externo.



Transformação "Chapéu-Alto"

Chapéu-Alto (*Top-Hat*): consiste na diferença algébrica entre a função (imagem) e a sua abertura.

$$TH(f) = f - \gamma_B(f)$$



Ciências ULisboa

Transformação “Chapéu-Alto”

São extraídos os picos de intensidade da imagem.

Todas as estruturas que não contêm o elemento estruturante são extraídas da imagem.

Realça os detalhes da imagem.

É um exemplo de como é mais simples agir sobre as estruturas relevantes, em vez das suprimir directamente os objectos mais irrelevantes.

Transformação “Chapéu-Alto”

Exemplo do chapéu-alto:

Inicial

f

Top-Hat

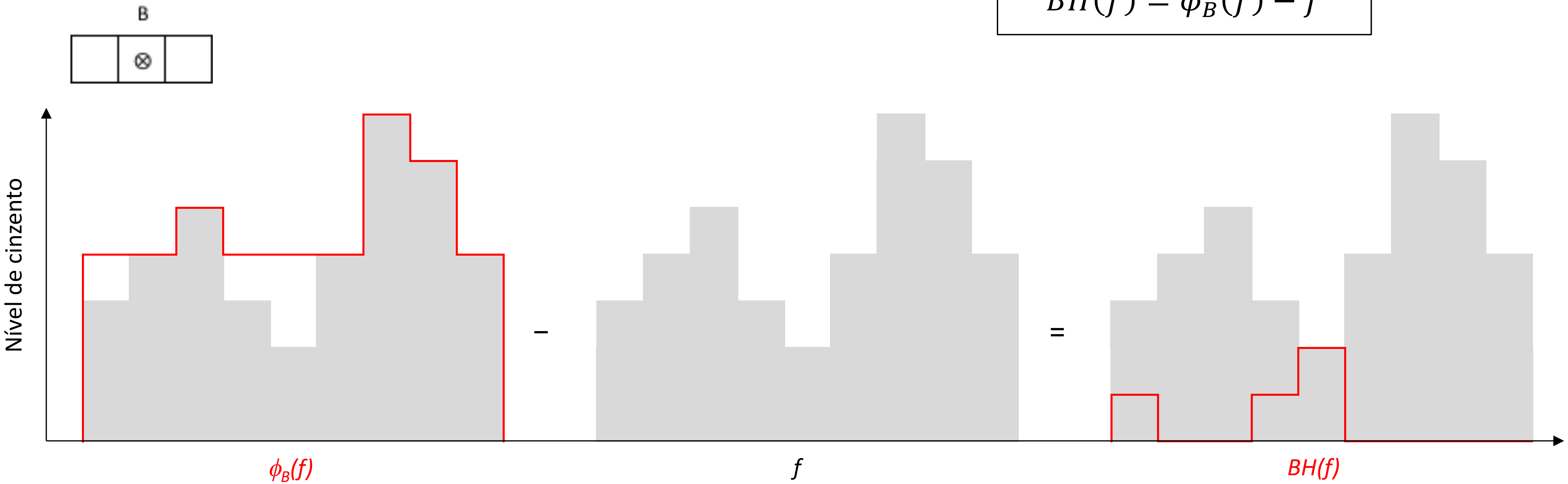
$TH(f) = f - \gamma_B(f)$

Fernando Soares

Transformação “Chapéu-Baixo”

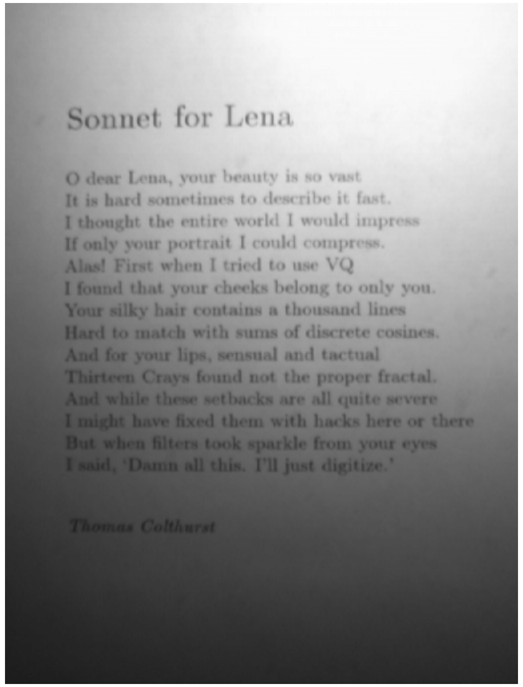
Chapéu-Baixo (*Bottom-Hat*): consiste na diferença algébrica entre o fecho da imagem e a imagem inicial.

$$BH(f) = \phi_B(f) - f$$



Transformação “Chapéu-Baixo”

Exemplo do chapéu-baixo:

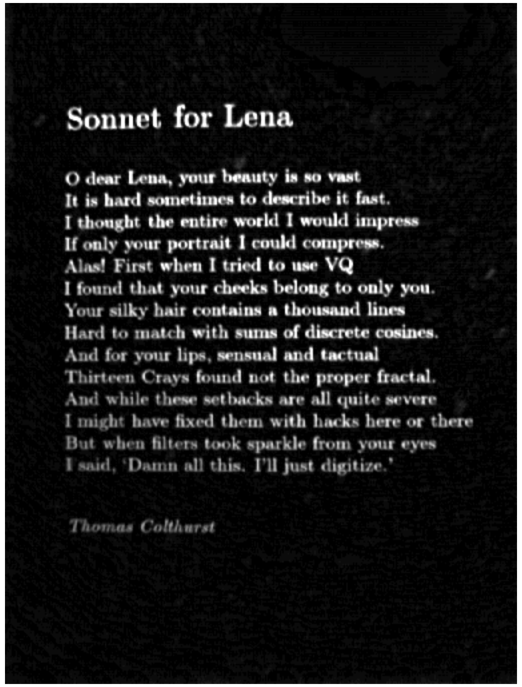


Sonnet for Lena

O dear Lena, your beauty is so vast
It is hard sometimes to describe it fast.
I thought the entire world I would impress
If only your portrait I could compress.
Alas! First when I tried to use VQ
I found that your cheeks belong to only you.
Your silky hair contains a thousand lines
Hard to match with sums of discrete cosines.
And for your lips, sensual and tactual
Thirteen Crays found not the proper fractal.
And while these setbacks are all quite severe
I might have fixed them with hacks here or there
But when filters took sparkle from your eyes
I said, ‘Damn all this. I’ll just digitize.’

Thomas Colthurst

f



Sonnet for Lena

O dear Lena, your beauty is so vast
It is hard sometimes to describe it fast.
I thought the entire world I would impress
If only your portrait I could compress.
Alas! First when I tried to use VQ
I found that your cheeks belong to only you.
Your silky hair contains a thousand lines
Hard to match with sums of discrete cosines.
And for your lips, sensual and tactual
Thirteen Crays found not the proper fractal.
And while these setbacks are all quite severe
I might have fixed them with hacks here or there
But when filters took sparkle from your eyes
I said, ‘Damn all this. I’ll just digitize.’

Thomas Colthurst

$BH(f) = \phi_B(f) - f$

Top-Hat auto-complementar

A soma do Top-Hat com o Bottom-Hat extrai todos o objectos da imagem que não contêm o elemento estruturante dado, quaisquer que sejam os seus contrastes relativos (ou seja, picos e vales).

A partir das respectivas expressões deduz-se facilmente que,

$$\boxed{TH(f) + BH(f) = f - \gamma_B(f) + \phi_B(f) - f = \phi_B(f) - \gamma_B(f)}$$

Ou seja, o Top-Hat auto-complementar é dado pela diferença entre o fecho e a abertura.

Ciências ULisboa

Top-Hat e contraste de imagem

Um simples operador morfológico de contraste pode ser obtido com a diferença com a determinação de ambos os operadores de Top-Hat e Bottom-Hat em paralelo. O Top-Hat é então adicionado à imagem original (para realçar os objectos mais claros) e o Bottom-Hat é subtraído da imagem resultante (para realçar os objectos mais escuros).

$$\boxed{f + TH(f) - BH(f) = f + f - \gamma_B(f) - \phi_B(f) + f}$$

Os valores resultantes que fiquem de fora do intervalo dinâmico da imagem inicial [z_{min}; z_{max}] terão os valores z_{min}, ou z_{max} , consoante fiquem abaixo ou acima dos extremos do intervalo.

Top-Hat e contraste de imagem

Exemplo:

Inicial

Top-Hat realce

Filtragem sequencial alternada

A filtragem de uma imagem que contenha ruídos escuro e claro pode ser obtida através da aplicação de uma sequência de operações de fecho-abertura ou abertura-fecho.

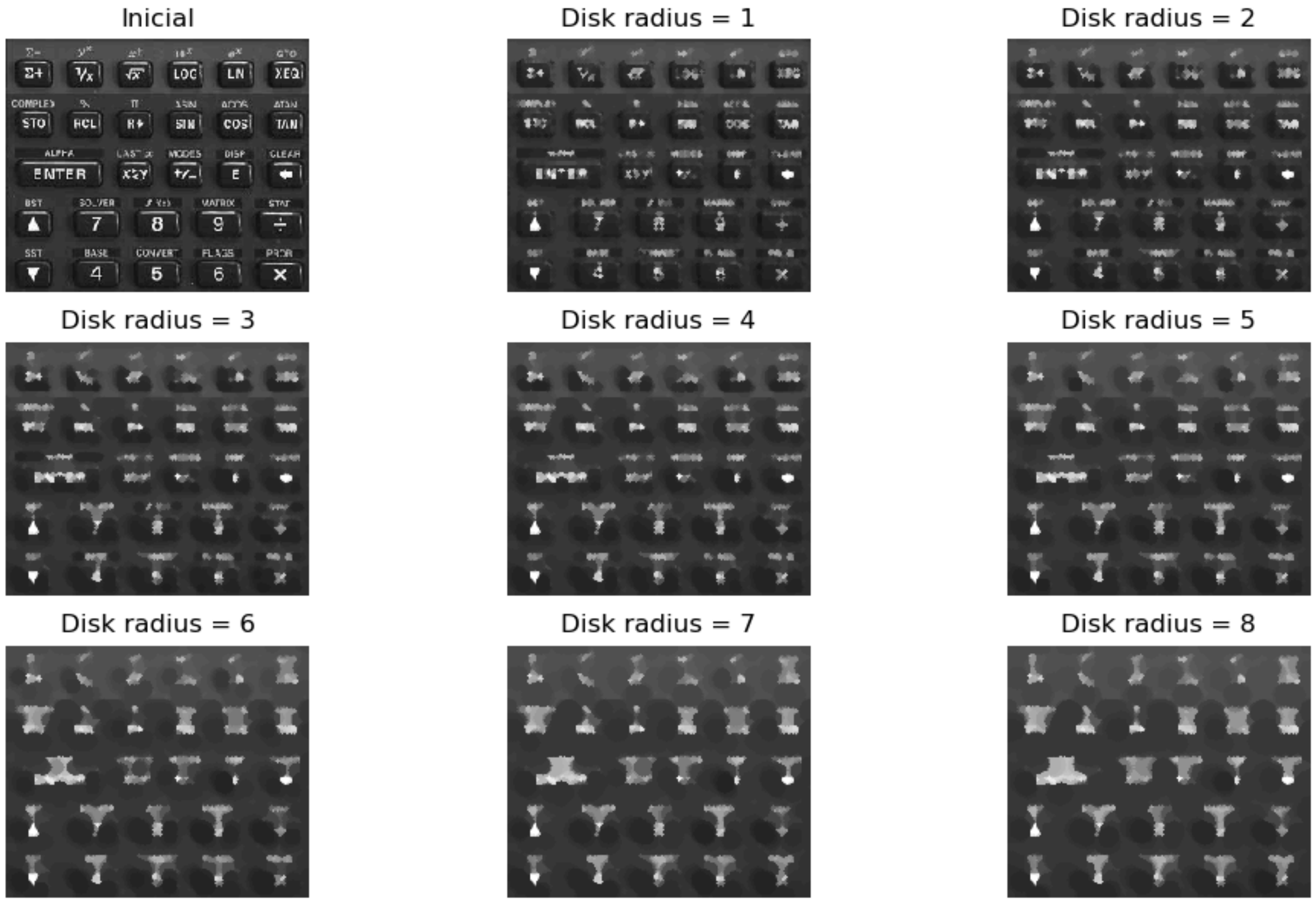
Uma só operação sequencial de fecho-abertura, ou abertura-fecho, com um elemento estruturante grande não produz resultados aceitáveis

Uma solução para este problema consiste em aplicar fechos e aberturas alternados, começando com elementos estruturantes de baixas dimensões e ir aumentado progressivamente o seu tamanho até um dado tamanho final.

A esta processo de filtragem por aplicação sequencial de fecho-abertura, ou abertura-fecho, dá-se o nome de **filtragem sequencial alternada**.

Filtragem sequencial alternada

Exemplo:



Ciências ULisboa

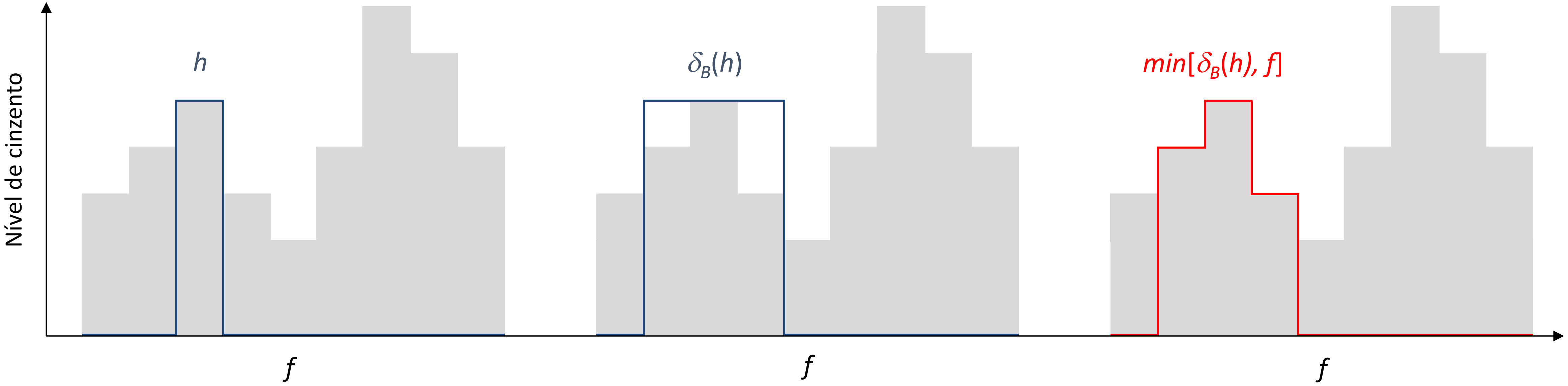
Transformações geodésicas numéricas

Transformações geodésicas numéricas são transformações morfológicas aplicadas a uma imagem numérica *h*, mas condicionadas pela morfologia de uma outra imagem numérica *f*.

Transformações geodésicas numéricas

Dilatação geodésica: consiste em determinar o valor mínimo entre a dilatação da imagem marcadora h (≤ f) e a função f.

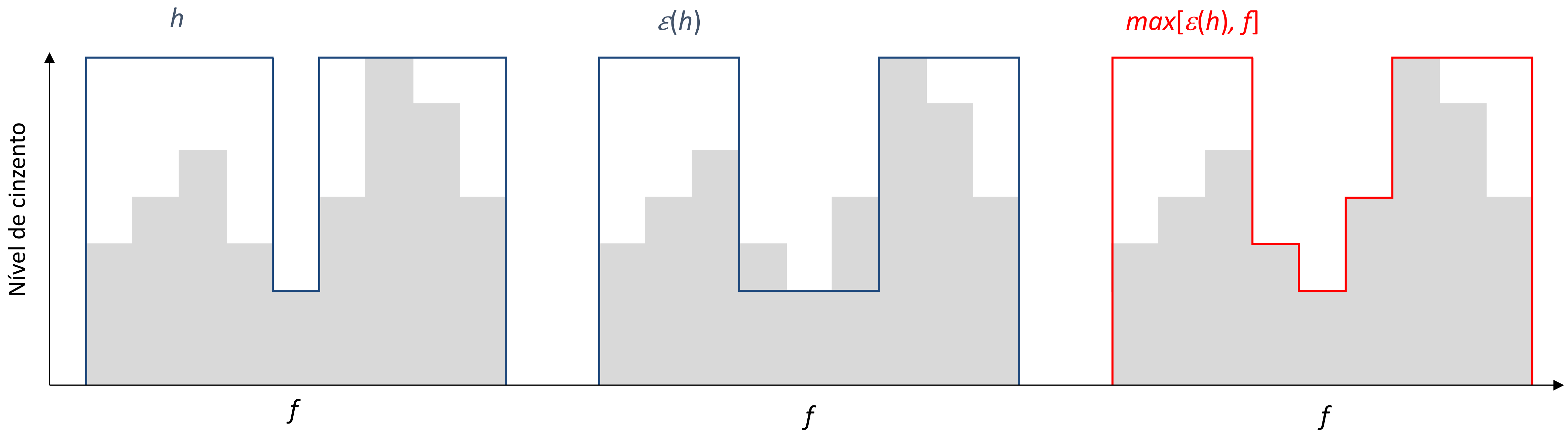
$$\boxed{\delta_f(h) = min\left[\delta_B\left(h(x,y)\right); f(x,y)\right]}$$



Transformações geodésicas numéricas

Erosão geodésica: consiste em determinar o máximo entre a erosão da imagem marcadora h (≥ f) e a função f.

$$\boxed{\varepsilon_f(h) = max\left[\varepsilon_B\left(h(x,y)\right); f(x,y)\right]}$$

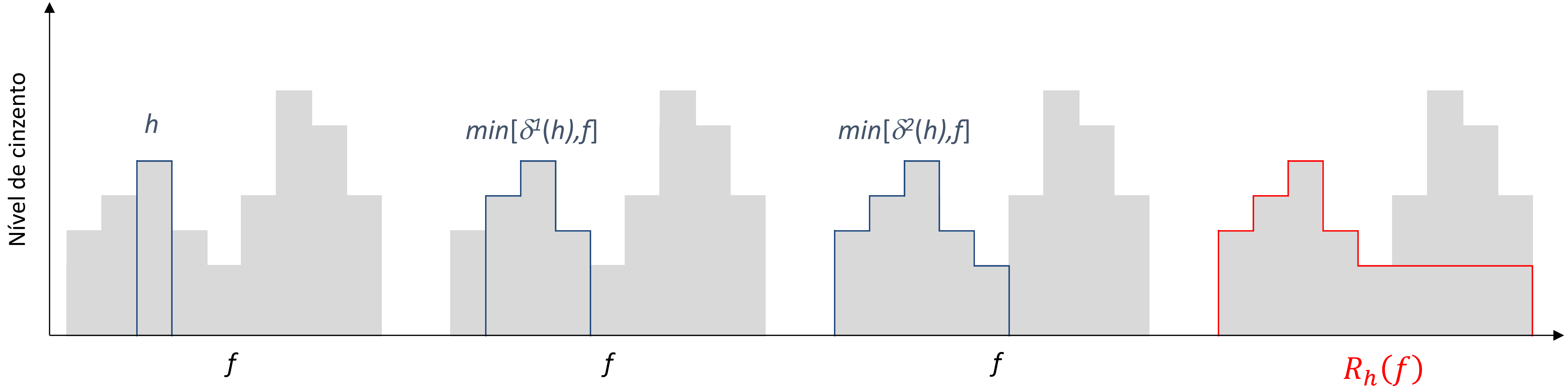


Fernando Soares

Transformações geodésicas numéricas

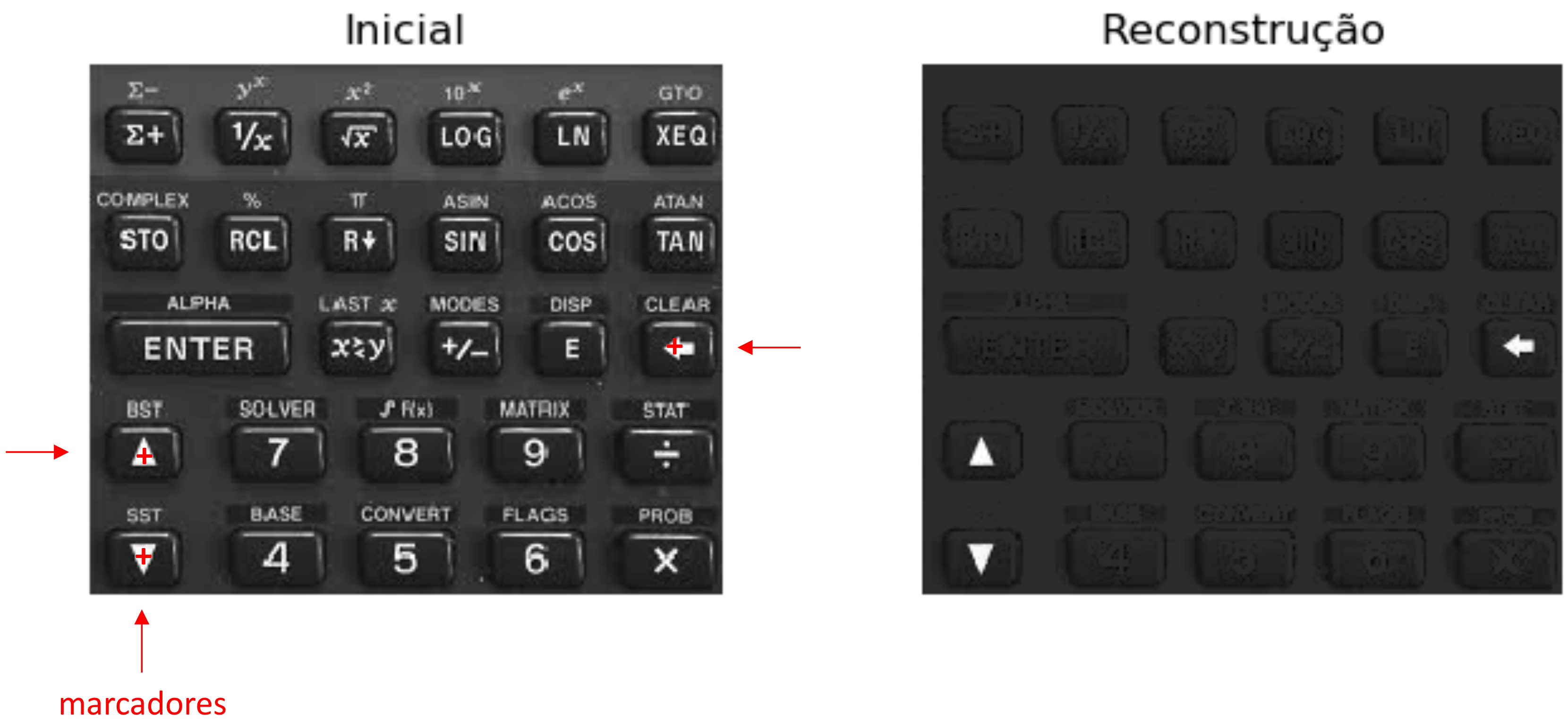
Reconstrução geodésica **por dilatações geodésicas sucessivas**.

$$\boxed{R_h(f) = \delta_f^{(i)}(h)}$$, até se verificar a condição $\delta_f^{(i+1)}(h) = \delta_f^{(i)}(h)$



Transformações geodésicas numéricas

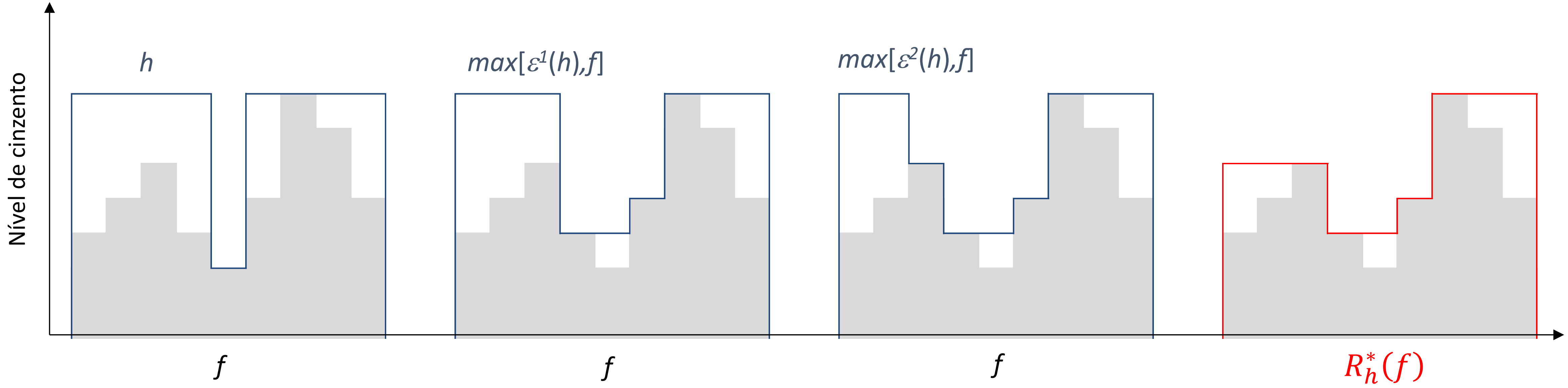
Exemplo da reconstrução geodésica **por dilatações geodésicas sucessivas**.



Transformações geodésicas numéricas

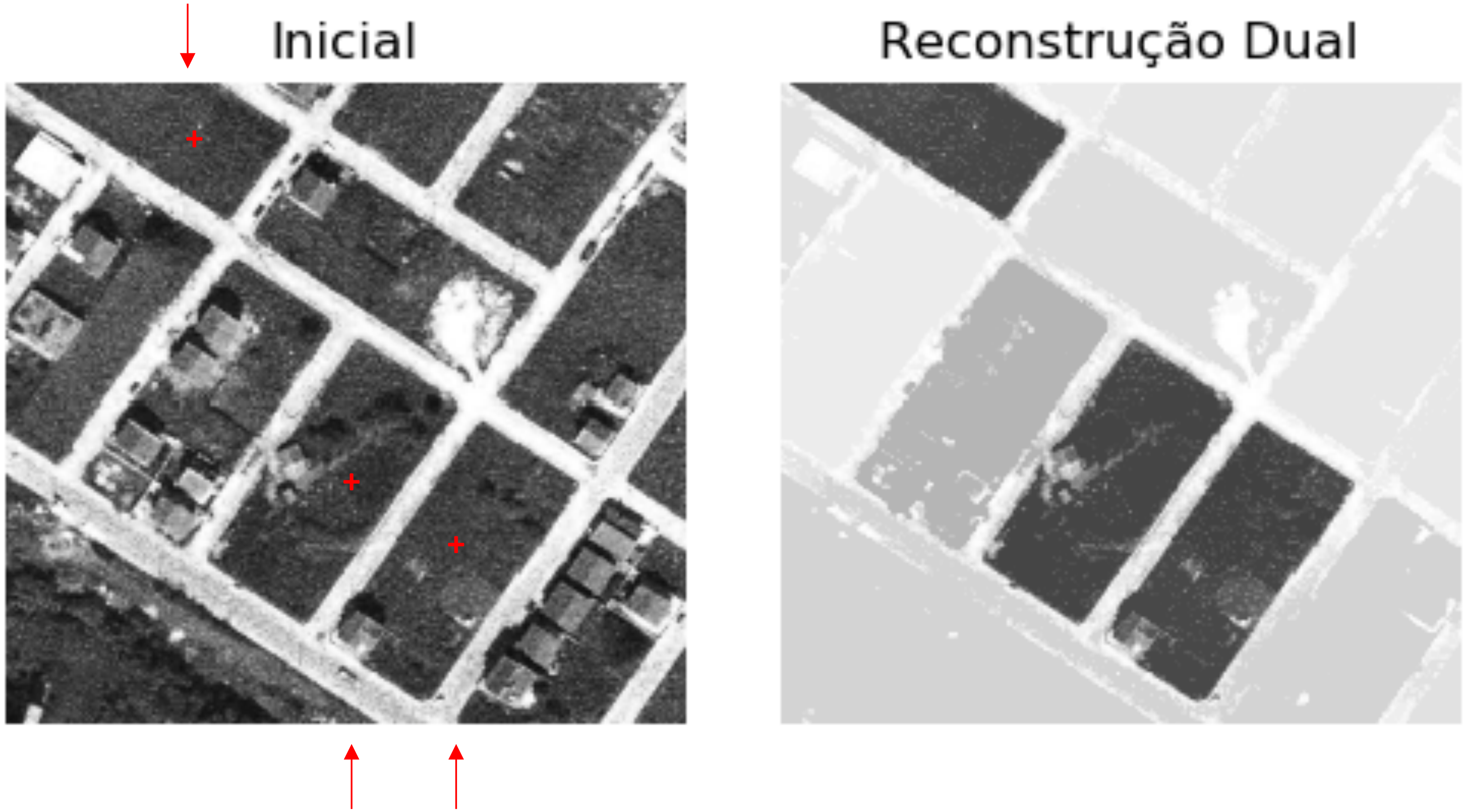
Reconstrução geodésica numérica por erosões geodésicas sucessivas (Reconstrução Dual).

$$\boxed{R_h^*(f) = \varepsilon_f^{(i)}(h)}$$, até se verificar a condição $\varepsilon_f^{(i+1)}(h) = \varepsilon_f^{(i)}(h)$



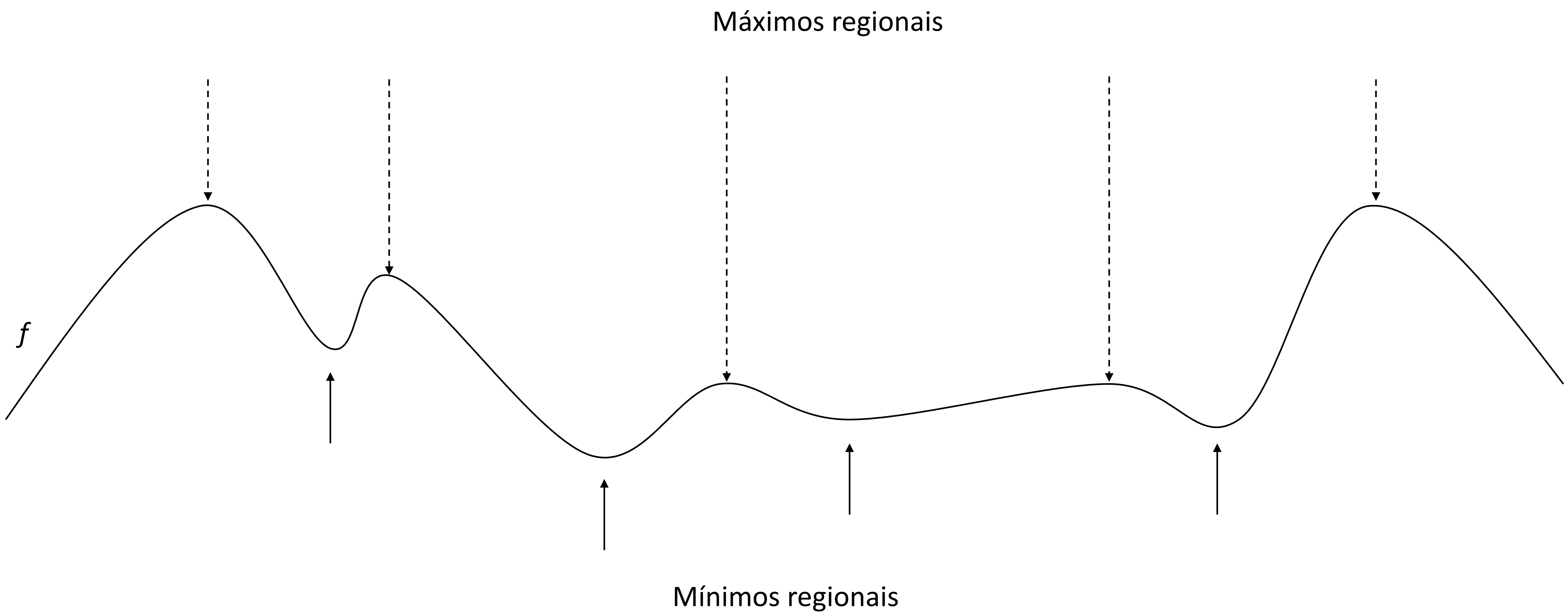
Transformações geodésicas numéricas

Exemplo da reconstrução geodésica numérica por erosões geodésicas sucessivas (Reconstrução Dual).



Extremos regionais

A imagem dos mínimos ou dos máximos regionais é uma imagem binária.

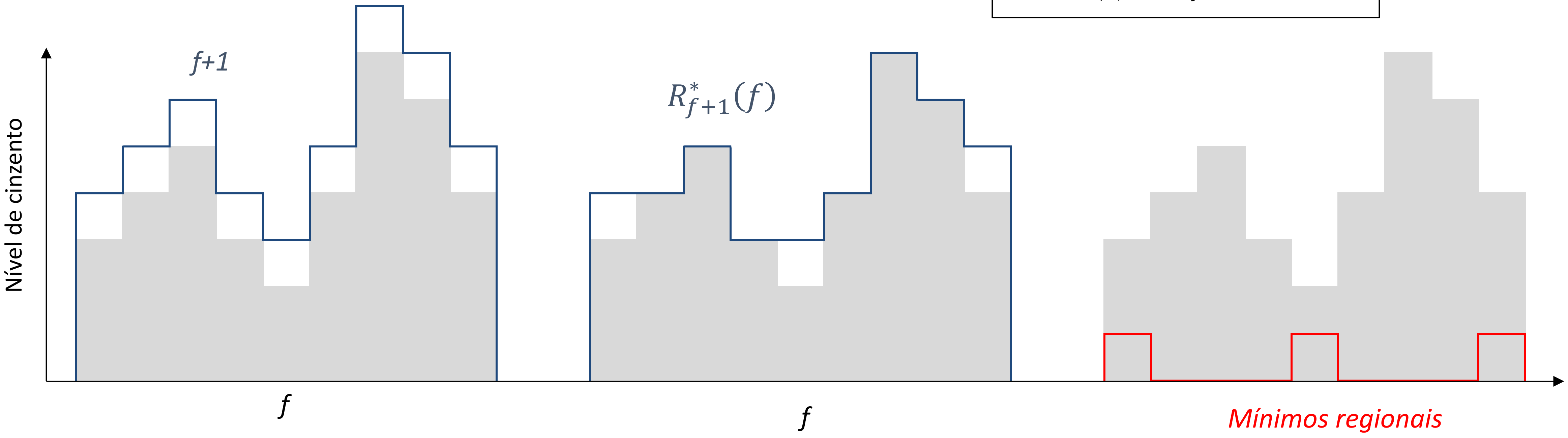


Fernando Soares

Extremos regionais

Um conjunto binário M$_h$ de uma imagem numérica f é um **mínimo regional** de elevação h se e só se M$_h$ for uma superfície conexa de igual altitude h, a partir da qual seja impossível alcançar um ponto de elevação inferior sem ter que antes ascender na função.

$$k_{\min(f)} = R^*_{f+1}(f) - f$$

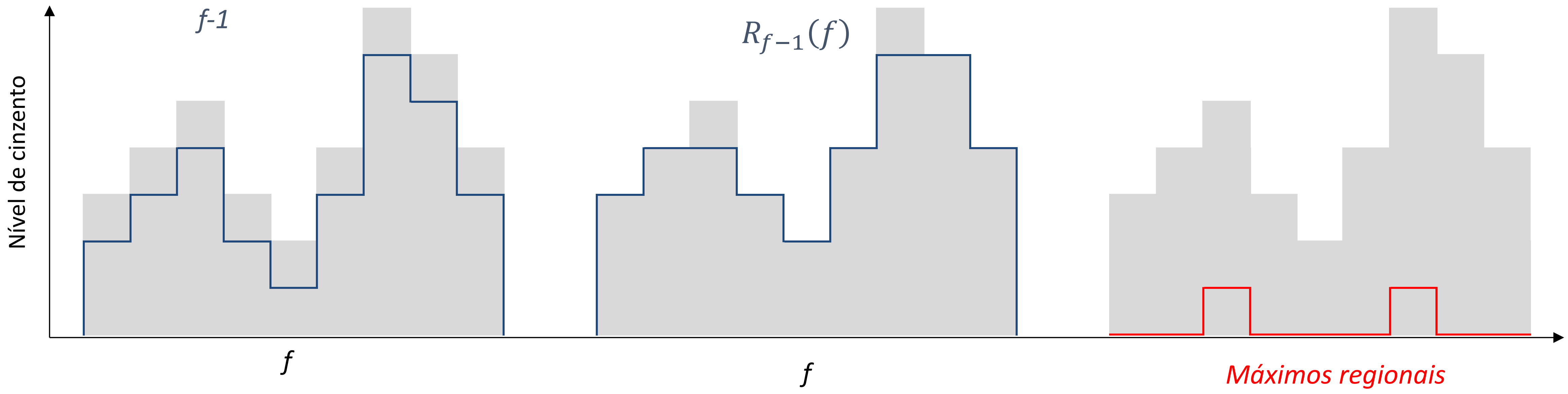


Fernando Soares

Extremos regionais

O mesmo se aplica ao conceito de **máximo regional** de elevação *h*, sendo que se tem que descer na função antes de alcançar outro máximo regional.

$$\boxed{k_{\max(f)} = f - R_{f-1}(f)}$$



Extremos regionais

Exemplo:

Inicial | Minimos | Máximos

Fernando Soares

Transformação Watershed

Transformação que visa **segmentar uma função de cinzentos** em regiões distintas, **a partir de uma imagem binária de marcadores**:

- Imagem de cinzentos *f*: superfície topográfica definida pelos valores de cinzento dos pixels.

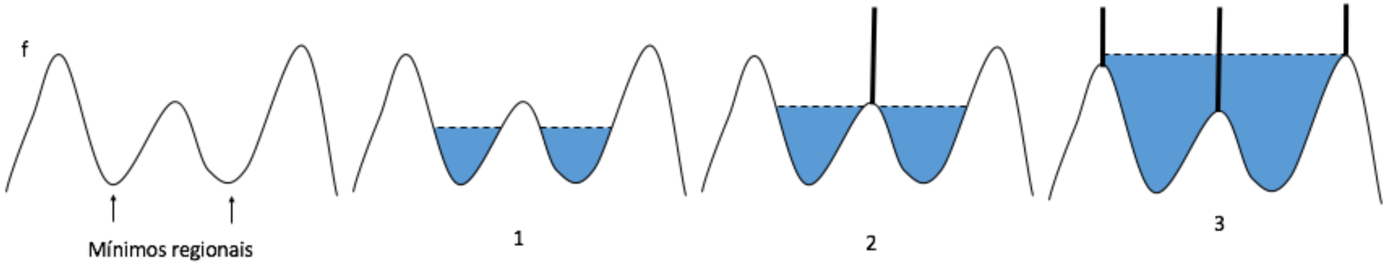
- Imagem binária de marcadores: são pixels isolados ou conjuntos de pixels.

- Linhas de *watershed* e as bacias de escoamento: definem-se por intermédio de um processo análogo ao processo físico de imersão vertical da superfície em água, com velocidade constante, a partir de uma imagem binária de marcadores.

Transformação Watershed

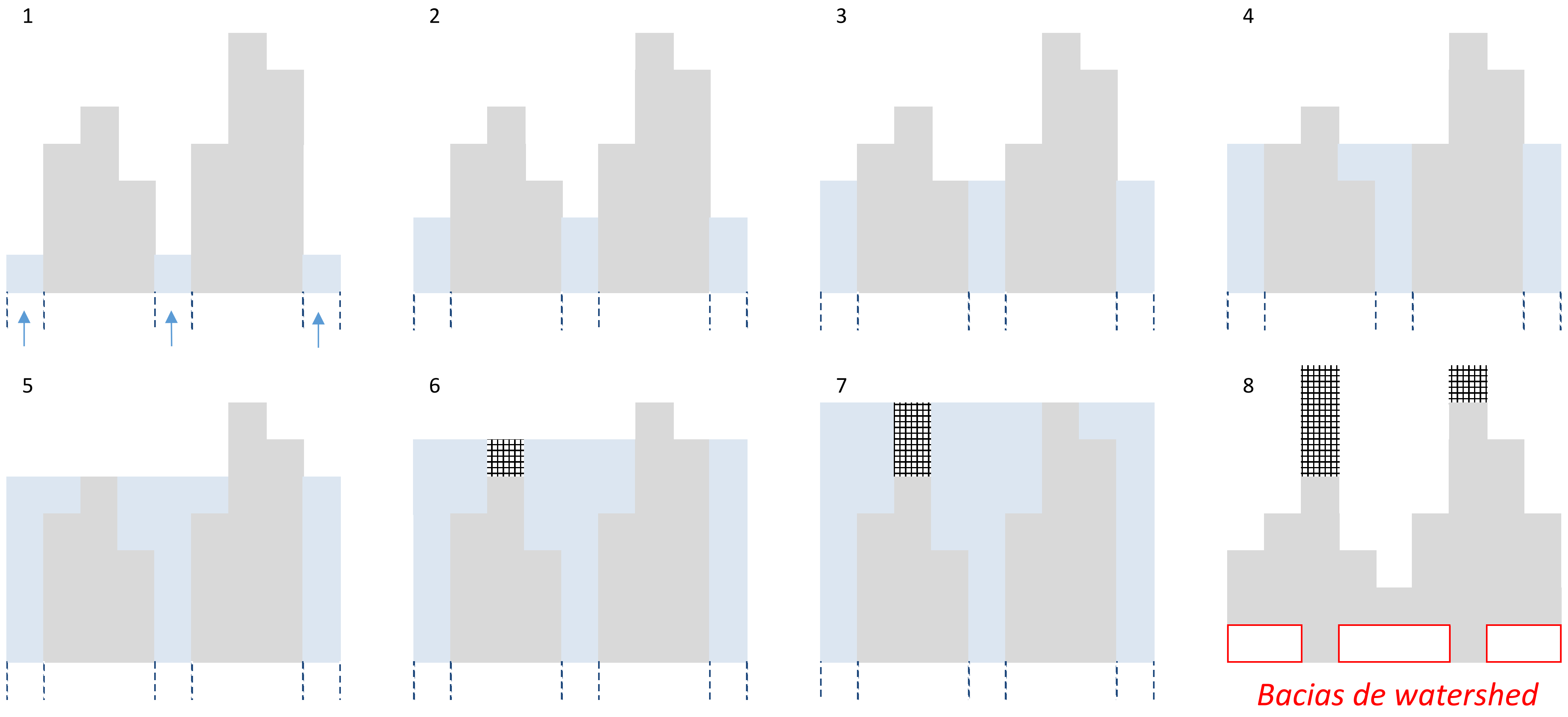
Por analogia com um processo de imersão, em água, de uma superfície com furos nos seus mínimos regionais, em certa altura dois ou mais vales inundados acabarão por se fundir. Para evitar que tal suceda, erguem-se barreiras em todos os pontos da superfície onde a fusão acontece.

No final do processo, apenas as barreiras são representadas. A estas barreiras dá-se o nome de linhas de *watershed* da superfície, que separam as bacias de escoamento umas das outras.



Transformação Watershed

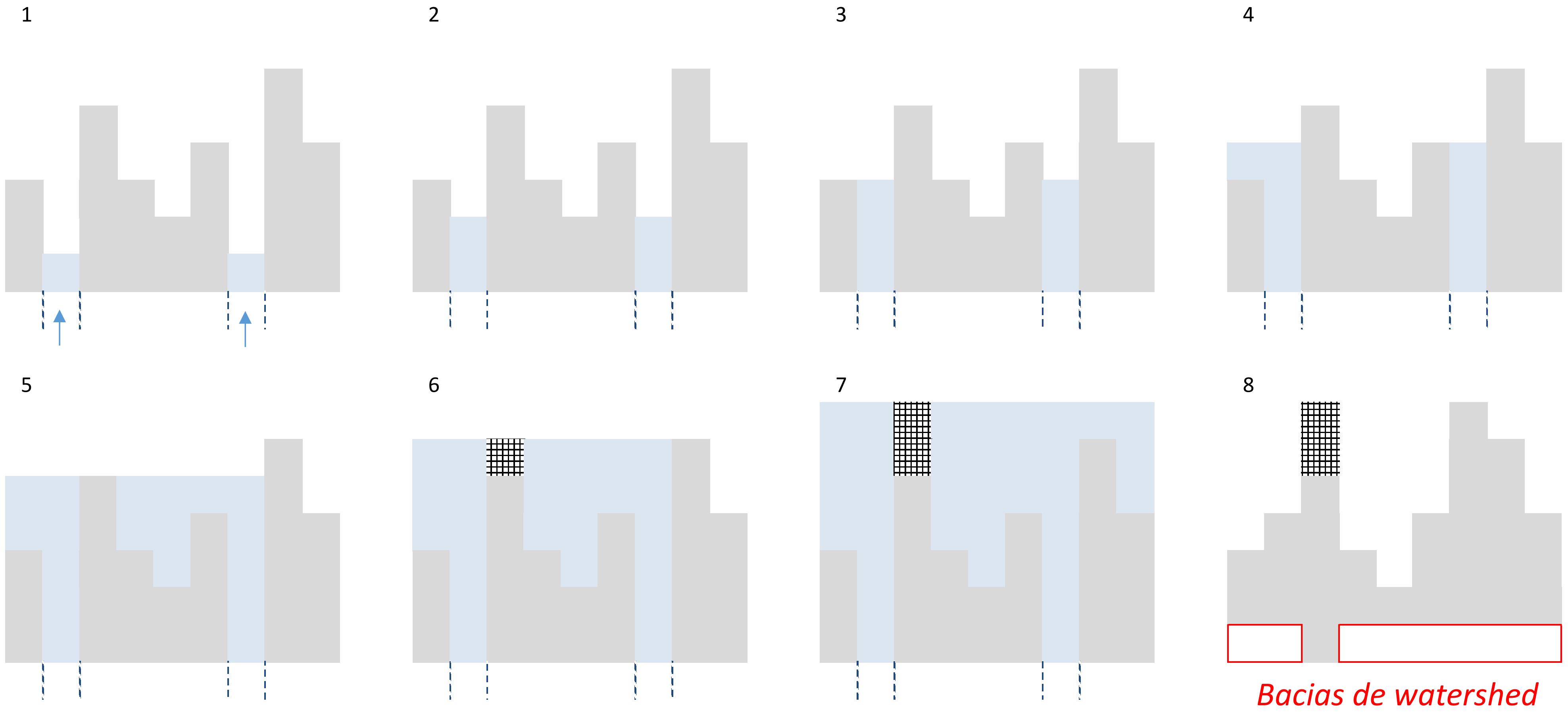
Ilustração do processo de inundação a partir dos mínimos regionais.



Fernando Soares

Transformação Watershed

Ilustração do processo genérico de inundação a partir de um qualquer conjunto de marcadores.

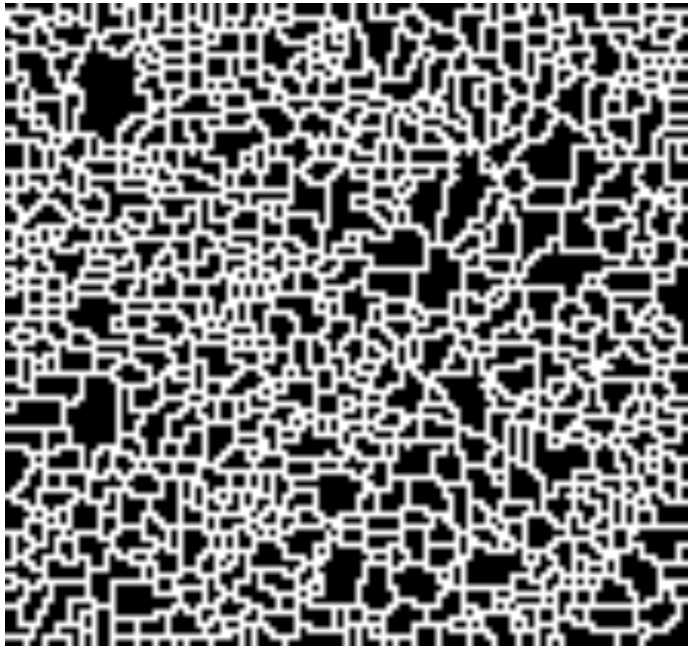


Fernando Soares

Transformação Watershed

Exemplo da transformação watershed, a partir dos mínimos regionais.

Imagem inicial

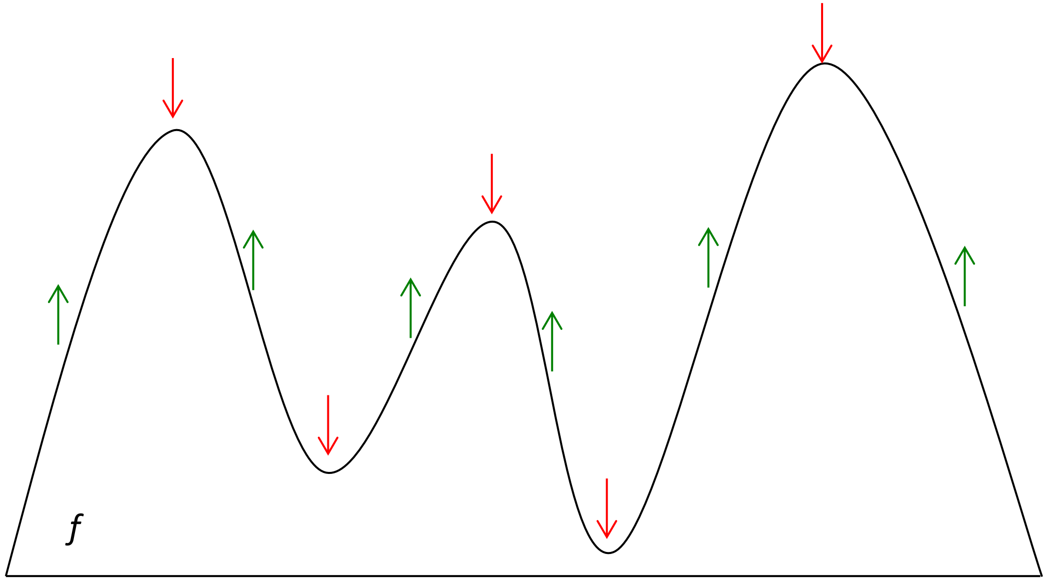


Linhas de *watershed*

Bacias de escoamento

Transformação Watershed

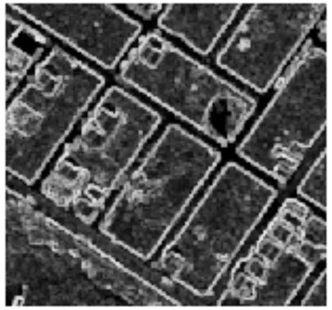
***Watershed* da imagem do gradiente**: em vez da imagem original *f*, aplica-se sobre a imagem de cinzentos do gradiente morfológico ∇ (ou outro), a partir dos respectivos mínimos regionais.



↑ Máximo da função gradiente ↓ Mínimo da função gradiente

Original

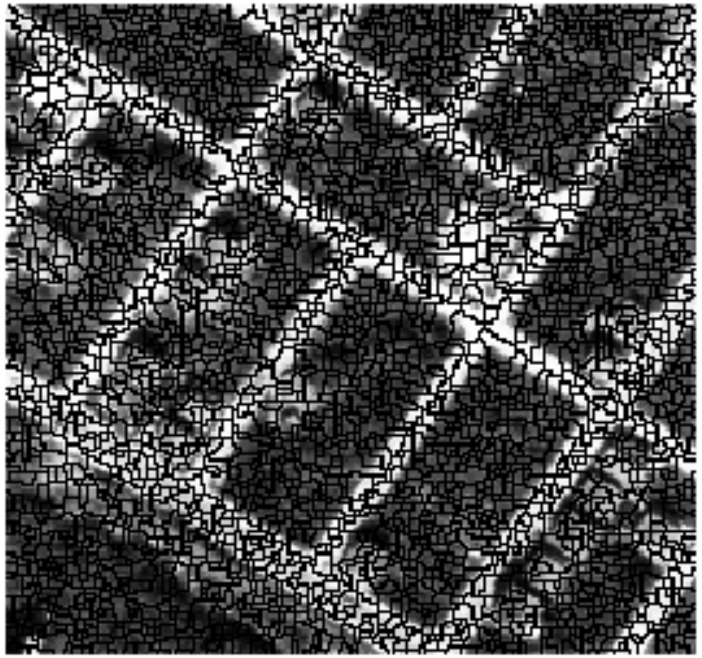
Gradiente morfologico



Transformação Watershed

Watershed da imagem do gradiente.

Watershed de F



Watershed de G